Lineare algebraische Gruppen

Vorlesungsreihe vom Herbstsemester 2020 - Sommersemester 2021
Fakultät für Mathematik, Universität Leipzig
frei nach
T.A.Springer
Birkhäuser, Boston 1981
(zweite Auflage 1998)

Ort der Vorlesung: Seminargebäude, Raum 2-14
Zeit der Vorlesung: 13.15-14.45 Uhr Freitags

4 Derivationen, Differentiale, Lie-Algebren 57

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Tangentialräumen an algebraische Varietäten und damit zusammenhängenden Gegenständen. Im zweiten Teil des Kapitels werden die Lie-Algebren von linearen algebraischen Gruppen eingeführt und deren grundlegende Eigenschaften bewiesen.

4.1 Derivationen und Tangentialräume 57

Wir erinnern zunächst an den Begriff der Derivation.

4.1.1 Derivationen 57

4.1.1 A Definition 57

Seien R ein kommutativer Ring, A eine R-Algebra und M ein (linker) A-Modul. Eine R-Derivation von A mit Werten in M ist eine R-lineare Abbildung

$$D: A \longrightarrow M$$

mit

$$D(a\bullet b) = a\bullet Db + b\bullet Da$$

für a, b $\in$ A. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Der}_R(A,M)$$

die Menge der R-Derivationen von A mit Werten in R. Im Fall M = A schreiben wir auch

$$\mathrm{Der}_R(A) := \mathrm{Der}_R(A,A).$$

Die Elemente dieser Mengen heißen R-Derivationen der R-Algebra A.

Bemerkungen

(i) Es gilt

$$D(r\bullet 1_A) = 0 \text{ für jedes } r \in R.$$

(ii) $\mathrm{Der}_R(A,M)$ ist ein (linker) R-Modul bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Abbildungen mit Werten in einem R-Modul, d.h.

$$(D' + D'')(a) := D'(a) + D''(a)$$

und

$$(r\bullet D)(a) := (r\bullet 1_A)\bullet D(a)$$

für D', D'' $\in \mathrm{Der}_R(A,M)$, a $\in$ A und r $\in$ R. Genauer, mit diesen Operationen ist $\mathrm{Der}_R(A,M)$ ein Teilmodul des R-Moduls $\mathrm{Hom}_R(A, M)$.

(iii) Für jeden Homomorphismus ϕ: A $\longrightarrow$ B von R-Algebren und jeden B-Modul N ist

$$\phi_0\colon\ \mathrm{Der}_R(B, N) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, N),\ D \mapsto D\circ\phi,$$

ein wohldefinierter Homomorphismus von A-Moduln. Dabei sei N mit der durch ϕ definierten A-Modul-Struktur versehen, d.h. es sei

$$a\bullet n := \phi(a)\bullet n \text{ für } a\in A \text{ und } n \in N.$$

(iv) Mit den Bezeichnungen von (iii) ist die folgende Sequenz von A-Moduln exakt.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, N) \xrightarrow{i} \mathrm{Der}_R(B, N) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Der}_R(A, N)$$

Dabei soll i die natürliche Einbettung bezeichnen.

(v) Seien R ein kommutativer Ring mit 1, A eine R-Algebra, $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge,

$$\phi{:}A \longrightarrow S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{as}{s}$$

die natürliche Abbildung in den Quotientenring und N ein Modul über $S^{-1}A$. Wir versehen N mit der durch ϕ definierten A-Modulstruktur. Dann ist die Abbildung

$$\phi_0\colon\ \mathrm{Der}_R(S^{-1}A, N) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, N),\ D \mapsto D\circ\phi,$$

von Bemerkung (iii) ein Isomorphismus von A-Moduln. Außerdem gilt

$$\mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) = 0.$$

Beweis. Zu (i). Weil D eine Derivation ist, gilt

$$D(r\bullet 1_A) = D(r\bullet 1_A\bullet 1_A) = r\bullet 1_A\bullet D(1_A) + 1_A\bullet D(r\bullet 1_A)$$

und weil D eine R-lineare Abbilung ist, muß

$$D(r\bullet 1_A) = r\bullet D(1_A) = r\bullet 1_A\bullet D(1_A)$$

gelten. Zusammen ergibt sich

$$0 = 1_A\bullet D(r\bullet 1_A) = D(r\bullet 1_A).$$

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, daß die beschriebenen Operationen, die Die Teilmenge $\mathrm{Der}_R(A,M)$

von $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ in sich überführen.

Die Summe zweier R-linearer Abbildungen ist R-linear. Für

$$D', D'' \in \mathrm{Der}_R(A,M)$$

und $a,b \in A$ ist

$$\begin{aligned}(D'+D'')(a\bullet b) &= D'(a\bullet b) + D''(a\bullet b)\\ &= a\bullet D'b + b\bullet D''a + a\bullet D''b + b\bullet D''a\\ &= a\bullet(D'b + D''b) + b\bullet(D'a + D''a)\\ &= a\bullet(D'+D'')b + b\bullet(D'+D'')a,\end{aligned}$$

d.h. $D'+D'' \in \mathrm{Der}_R(A,M)$.

Für jedes $r \in R$ ist das r-fache einer R-linearen Abbildung eine R-lineare Abbildung.

Weiter gilt für $r\in R$, $D \in \mathrm{Der}_R(A,M)$ und $a, b \in A$

$$\begin{aligned}(r\bullet D)(a\bullet b) &= (r\bullet 1_A)\bullet D(a\bullet b)\\ &= (r\bullet 1_A)\bullet a\bullet Db + (r\bullet 1_A)\bullet b\bullet D(a)\\ &= a\bullet(r\bullet 1_A)\bullet Db + b\bullet(r\bullet 1_A)\bullet D(a)\\ &= a\bullet(r\bullet D)(b) + b\bullet(r\bullet D)(a),\end{aligned}$$

d.h. $r \bullet D \in \mathrm{Der}_R(A,M)$.

<u>Zu (iii)</u>. Weil $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ eine R-lineare Abbildung ist und ϕ ein R-Algebra-Homomorphismus (also ebenfalls eine R-lineare Abildung), ist auch $D\circ\phi$ eine R-lineare Abiblung. Für $a,b \in A$ gilt

$$\begin{aligned}(D\circ\phi)(a\bullet b) &= D(\phi(a)\bullet\phi(b)) && (\phi \text{ ist ein Ring-Homomorphismus})\\ &= \phi(a)\bullet D(\phi(b)) + \phi(b)\bullet D(\phi(a)) && (D \text{ ist eine Derivation})\\ &= a\bullet(D\circ\phi)b + b\bullet(D\circ\phi)a && (\text{nach Definition der A-Multiplikation von N})\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, $D\circ\phi \in \mathrm{Der}_R(A, N)$, d.h. ϕ_0 ist eine wohldefinierte Abbildung.

Für $D', D'' \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ und $a \in A$ gilt

$$\begin{aligned}\phi_0(D'+D'')(a) &= (D'+D'')(\phi(a))\\ &= D'(\phi(a)) + D''(\phi(a))\\ &= \phi_0(D')(a) + \phi_0(D'')(a),\end{aligned}$$

also

$$\phi_0(D'+D'') = \phi_0(D') + \phi_0(D'').$$

Weiter gilt für $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ und $a, b \in A$

$$\begin{aligned}\phi_0(a\bullet D)(b) &= (a\bullet D)(\phi(b))\\ &= a\bullet(D(\phi(b)))\\ &= a\bullet (\phi_0(D)(b))\\ &= (a\bullet \phi_0(D))(b)\end{aligned}$$

also

$$\phi_0(a\bullet D) = a\bullet \phi_0(D).$$

Wir haben gezeigt ϕ_0 ist A-linear, d.h. ein Homomorphismus von A-Moduln.

<u>Zu (iv)</u>. Weil jede A-lineare Abbildung $B \longrightarrow N$ erst recht R-linear ist, ist $\mathrm{Der}_A(B, N)$ eine Teilmenge von $\mathrm{Der}_R(B, N)$, d.h. die Abbildung i ist wohldefiniert (und als identische Abbildung mit Werten im A-Modul N auch A-linear. Wir haben noch zu zeigen, die Sequenz ist exakt.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $\mathrm{Der}_A(B, N)$.

Als identische Abbildung ist i injektiv.

<u>Exaktheit an der Stelle</u> $\mathrm{Der}_R(B, N)$.

Für $D \in \mathrm{Der}_A(B, N)$ ist i(D) eine A-lineare R-Derivation. Damit gilt für $a \in A$,

$$\begin{aligned}\phi_0(i(D))(a) &= i(D)(\phi(a)) && (\text{nach Definition von } \phi_0)\\ &= i(D)(\phi(a\bullet 1_A))\\ &= a\bullet i(D)(\phi(1_A)) && (i(D) \text{ ist A-linear})\\ &= a\bullet i(D)(1_B) && (\phi \text{ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1})\end{aligned}$$

$= a\bullet D(1_R\bullet 1_B)$
$= a\bullet 0$ (nach Bemerkung (i))
$= 0.$

Wir haben gezeigt,

$$\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi_0).$$

Wir haben noch die umkehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$D \in \mathrm{Ker}(\phi_0),$$

d.h. es gilt $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ und $D(\phi(a)) = 0$ für jedes $a \in A$. Für $a \in A$ und $b \in B$ ist dann

$D(a\bullet b) = D(\phi(a)\bullet b)$ (nach Definition der A-Modul-Struktur von N)
$= \phi(a)\bullet D(b) + b\bullet D(\phi(a))$
$= \phi(a)\bullet D(b)$ (wegen $D(\phi(a)) = 0$)
$= a\bullet D(b)$ (nach Definition der A-Modul-Struktur von N).

Wir haben gezeigt, die R-Derivation $D: B \longrightarrow N$ ist A-linear, also eine A-Derivation. Sie liegt also im Bild von i,

$$D \in \mathrm{Im}(i).$$

Zu (v). 1. Schritt. $\mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) = 0$.

Sei $D \in \mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N)$. Für jedes Element von $f \in S^{-1}A$ gibt es Elemente $a \in A$ und $s \in S$ mit $f\bullet\phi(s) = \phi(a)$. Es gilt

$0 = D(\phi(a))$ (D ist eine A-Derivation)
$= f\bullet D(\phi(s)) + \phi(s)\bullet D(f)$ (D ist eine Derivation)
$= f\bullet 0 + \phi(s)\bullet D(f)$ (D ist eine A-Derivation)
$= \phi(s)\bullet D(f).$

Weil $\phi(s)$ eine Einheit von $S^{-1}A$ ist und N ein $S^{-1}A$-Modul, können wir mit dem Inversen von $\phi(s)$ multiplizieren und erhalten

$0 = D(f).$

Wir haben gezeigt, $\mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) = 0$.

2. Schritt. ϕ_0 ist injektiv.

Auf Grund der zu $\phi: A \longrightarrow S^{-1}A$ gehörigen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(S^{-1}A, N) \xrightarrow{i} \mathrm{Der}_R(S^{-1}A, N) \xrightarrow{\phi_0} \mathrm{Der}_R(A, N).$$

von Bemerkung (iv) ist die Injektivität von ϕ_0 eine Konsequenz des ersten Schritts.

3. Schritt. ϕ_0 ist surjektiv.

Sei $D \in \mathrm{Der}_R(A, N)$. Wir haben zu zeigen, daß es ein

$$\tilde{D} \in \mathrm{Der}_R(S^{-1}A, N)$$

gibt mit

$$D = \tilde{D}\circ\phi.$$

Jedes Element von $S^{-1}A$ hat die Gestalt $\frac{a}{s}$ mit $a \in A$ und $s \in S$. Wir setzen

$$\widetilde{D}(\frac{a}{s}) := \frac{1}{s^2} \cdot (s \cdot D(a) - a \cdot D(s))$$

<u>Die Definition von</u> $\widetilde{D}$ <u>ist korrekt</u>: Sind $a' \in A$ und $s' \in S$ Elemente mit

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$$

so gibt es ein $t \in S$ mit

$$t \cdot (a \cdot s' - a' \cdot s) = 0, \qquad (1)$$

also

$$\begin{aligned}
0 &= D(t \cdot (a \cdot s' - a' \cdot s)) \\
&= D(t \cdot a \cdot s') - D(t \cdot a' \cdot s) \quad \text{(D ist R-linear)} \\
&= a \cdot s' \cdot D(t) + t \cdot s' \cdot D(a) + t \cdot a \cdot D(s') \\
&\qquad - a' \cdot s \cdot D(t) - t \cdot s \cdot D(a') - t \cdot a' \cdot D(s) \\
&= a \cdot s' \cdot D(t) + t \cdot s' \cdot D(a) + t \cdot a \cdot D(s') \\
&\qquad - a' \cdot s \cdot D(t) - t \cdot s \cdot D(a') - t \cdot a' \cdot D(s)
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit $s \cdot s'$ und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= a \cdot s \cdot s'^2 \cdot D(t) + t \cdot s \cdot s'^2 \cdot D(a) + t \cdot a \cdot s \cdot s' \cdot D(s') \\
&\qquad - a' \cdot s^2 \cdot s' \cdot D(t) - t \cdot s^2 \cdot s' \cdot D(a') - s \cdot s' t \cdot a' \cdot D(s) \\
&= a \cdot s \cdot s'^2 \cdot D(t) + t \cdot a \cdot s \cdot s' \cdot D(s') \\
&\qquad - a' \cdot s^2 \cdot s' \cdot D(t) - s \cdot s' t \cdot a' \cdot D(s) \\
&\qquad + t \cdot s'^2 \cdot (s \cdot D(a) - a \cdot D(s)) \\
&\qquad - t \cdot s^2 \cdot (s' \cdot D(a') - a' \cdot D(s')) \\
&\qquad + a \cdot t \cdot s'^2 \cdot D(s) - a' \cdot t \cdot s^2 \cdot D(s') \\
&= s \cdot s' \cdot (a \cdot s' - a' \cdot s) \cdot D(t) + t \cdot s' \cdot (a \cdot s' - a' \cdot s) \cdot D(s') \\
&\qquad - s' \cdot t \cdot (s \cdot a' - a \cdot s') \cdot D(s) \\
&\qquad + t \cdot s'^2 \cdot (s \cdot D(a) - a \cdot D(s)) \\
&\qquad - t \cdot s^2 \cdot (s' \cdot D(a') - a' \cdot D(s'))
\end{aligned}$$

Wegen (1) ist der zweite und der dritte Summand gleich Null. Ebenfalls wegen (1) wird der erste Summand gleich Null, wir mit t multiplizieren. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= t^2 \cdot s'^2 \cdot (s \cdot D(a) - a \cdot D(s)) - t^2 \cdot s^2 \cdot (s' \cdot D(a') - a' \cdot D(s')) \\
&= t^2 \cdot (s'^2 \cdot (s \cdot D(a) - a \cdot D(s)) - s^2 \cdot (s' \cdot D(a') - a' \cdot D(s')))
\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{s^2} \cdot (s \cdot D(a) - a \cdot D(s)) = \frac{1}{s'^2} \cdot (s' \cdot D(a') - a' \cdot D(s')).$$

Die Definition von $\widetilde{D}$ ist tatsächlich korrekt.

$\widetilde{D}$ <u>ist eine</u> R-<u>Derivation von</u> $S^{-1}A$ <u>mit Werten in</u> N: $\widetilde{D}$ ist eine R-linearre Abbildung, weil D eine R-lineare Abbildung ist. Wir haben noch zu zeigen, daß die Produkt-Regel

für $\widetilde{D}$ gilt. Für $a, b \in A$ und $s,t \in S$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}) &= \widetilde{D}(\frac{ab}{st}) \\
&= \frac{1}{(st)^2} \cdot (st \cdot D(ab) - ab \cdot D(st)) \qquad \text{(nach Defintion von } \widetilde{D}\text{)}
\end{aligned}$$

$= \frac{1}{(st)^2} \cdot (ast \cdot Db + bst \cdot Da - abs \cdot Dt - abt \cdot Ds)$ (D ist eine Derivation)

$= \frac{1}{(st)^2} \cdot (as \cdot (t \cdot Db - b \cdot Dt) + bt \cdot (s \cdot Da - a \cdot Ds))$

$= \frac{1}{s^2} \cdot as \cdot \widetilde{D}(\frac{b}{t}) + \frac{1}{t^2} \cdot bt \cdot \widetilde{D}(\frac{a}{s})$

$= \frac{a}{s} \cdot \widetilde{D}(\frac{b}{t}) + \frac{b}{t} \cdot \widetilde{D}(\frac{a}{s})$

Wir haben gezeigt, daß $\widetilde{D} \in Der_R(S^{-1}A, N)$ gilt.

Es gilt $\phi_0(\widetilde{D}) = D$.

Nach Definition gilt für $a \in A$:

$\phi_0(\widetilde{D})(a) = \widetilde{D}(\phi(a))$

$= \widetilde{D}(\frac{as}{s})$ (nach Definition von ϕ)

$= \frac{1}{s^2} \cdot (s \cdot D(as) - as \cdot D(s))$ (nach Defintion von $\widetilde{D}$)

$= \frac{1}{s^2} \cdot (s^2 \cdot D(a) + as \cdot D(s) - as \cdot D(s)$ (D ist ein Derivatin)

$= \frac{1}{s^2} \cdot s^2 \cdot D(a)$

$= \frac{s^2}{s^2} \cdot D(a)$

$= D(a)$ ($\frac{s^2}{s^2}$ ist das Einelement von $S^{-1}A$)

Da dies für alle $a \in A$ gilt, folgt $\phi_0(\widetilde{D}) = D$.

QED.

4.1.1 B Beispiel 1

Für jeden kommutativen Ring R mit 1 jeden Polynomring

$$A = R[T] = R[T_1, ..., T_n]$$

ist die partielle Ableitung nach T_i,

$$\frac{\partial}{\partial T_i}(\sum_{j=0}^{N} f_j \cdot T_i^j) := \sum_{j=0}^{N} j \cdot f_j \cdot T_i^{j-1} \text{ für } f_j \in k[T_1, ..., T_{i-1}, T_{i+1}, ..., T_n],$$

eine R-Derivation von A,

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \in Der_R(A).$$

Beweis. Nach Definition ist $\frac{\partial}{\partial T_i}$ eine R-lineare Abbildung. Die Abbildung ist sogar linear über

$$k[T_1, ..., T_{i-1}, T_{i+1}, ..., T_n]. \quad (1)$$

Wir haben zu zeigen,

$$\frac{\partial}{\partial T_i}(f\cdot g) = f\cdot \frac{\partial}{\partial T_i}(g) + g\cdot \frac{\partial}{\partial T_i}(f). \qquad (2)$$

Beide Seiten von (2) sind in f linear über (1). Wir können also annehmen

$$f = T_i^{\alpha}.$$

Analog sind beide Seiten von (2) linear in g über (1). Wir können also annehmen

$$f = T_i^{\beta}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T_i}(f\cdot g) &= \frac{\partial}{\partial T_i}(T_i^{\alpha+\beta})\\ &= (\alpha+\beta)\cdot T_i^{\alpha+\beta-1}\\ &= \alpha\cdot T_i^{\alpha-1}\cdot T_i^{\beta} + \beta\cdot T_i^{\beta-1}\cdot T_i^{\alpha}\\ &= T_i^{\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial T_i}(T_i^{\alpha}) + T_i^{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial T_i}(T_i^{\beta})\\ &= f\cdot \frac{\partial}{\partial T_i}(g) + g\cdot \frac{\partial}{\partial T_i}(f).\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, $\frac{\partial}{\partial T_i}$ ist eine R-Derivation von A.

QED.

4.1.1 C Beispiel 2

Seien R ein kommutativer Ring mit 1,

$$A = R[T] = R[T_1,...,T_n]$$

ein Polynomring in n Unbestimmten,

$$\rho: A \longrightarrow R$$

ein R-Algebra-Homomorphismus,

$$M$$

ein R-Modul und

$$m_1,..., m_n \in M.$$

Wir versehen M mit Hilfe von ρ mit einer A-Modul-Struktur,

$$a\cdot m := \rho(a)\cdot m \text{ für } a \in A \text{ und } m \in M.$$

Dann ist durch

$$D(f) := \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial f}{\partial T_i}\right)\cdot m_i \qquad (1)$$

eine R-Derivation von A mit Werten in M definiert,

$$D \in Der_R(A, M).$$

Umgekehrt hat jede R-Deriviation von A mit Werten in M diese Gestalt.

Beweis. 1. Schritt. Durch (1) ist eine R-Derivation von A mit Werten in M definiert.

Weil ρ ein R-Algebra-Homomorphismus, also insbesondere R-linear ist, ist

$$D: A \longrightarrow M$$

eine R-lineare Abbildung. Für f, g ∈ A gilt

$$
\begin{aligned}
D(f\bullet g) &= \sum_{i=1}^{n} \rho\Big(\frac{\partial(f\bullet g)}{\partial T_i}\Big)\bullet m_i && \text{(nach Definition von D)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\rho\Big(f\bullet\frac{\partial g}{\partial T_i} + g\bullet\frac{\partial g}{\partial T_i}\Big)\Big)\bullet m_i && \Big(\frac{\partial}{\partial T_i}\text{ ist eine R-Derivation)}\\
&= \rho(f)\bullet \sum_{i=1}^{n} \rho\Big(\frac{\partial g}{\partial T_i}\Big)\bullet m_i + \rho(g)\bullet \sum_{i=1}^{n} \rho\Big(\frac{\partial g}{\partial T_i}\Big)\bullet m_i\\
&= \rho(f)\bullet D(g) + \rho(g)\bullet D(f),
\end{aligned}
$$

d.h. D ist eine Derivation.

2. <u>Schritt</u>. Jede R-Derivation von A mit Werten in M hat die Gestalt (1).

Sei D eine R-Derivation von A mit Werten in M. Wir setzen

$$m_i := D(T_i)$$

und

$$\widetilde{D}(f) := \sum_{i=1}^{n} \rho\Big(\frac{\partial f}{\partial T_i}\Big)\bullet m_i .$$

Dann gilt für $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$$\widetilde{D}(T_i^{\ell}) = D(T_i^{\ell}). \tag{2}$$

Für $\ell = 0$ steht auf beiden Seiten 0 (weil D eine R-Derivation ist) und für $\ell = 1$ steht auf beiden Seiten m_i. Der allgemeine Fall folgt induktiv:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}(T_i^{\ell}) &= \widetilde{D}(T_i\bullet T_i^{\ell-1})\\
&= \rho(T_i)\bullet\widetilde{D}(T_i^{\ell-1}) + \rho(T_i^{\ell-1})\bullet\widetilde{D}(T_i) && (\widetilde{D}\text{ ist eine Derivation})\\
&= \rho(T_i)\bullet D(T_i^{\ell-1}) + \rho(T_i^{\ell-1})\bullet D(T_i) && \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&= D(T_i^{\ell}) && \text{(D ist ein Derivation)}
\end{aligned}
$$

Damit gilt (2). Sei jetzt

$$f = T_1^{\ell_1}\bullet\ldots\bullet T_n^{\ell_n}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}f &= \sum_{i=1}^{n} \rho(T_1^{\ell_1})\bullet\ldots\bullet \widetilde{D}(T_i^{\ell_i})\bullet\ldots\bullet\rho(T_n^{\ell_n}) && (\widetilde{D}\text{ ist eine R-Derivation})\\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho(T_1^{\ell_1})\bullet\ldots\bullet D(T_i^{\ell_i})\bullet\ldots\bullet\rho(T_n^{\ell_n}) && \text{(nach (2))}\\
&= Df && \text{(D ist eine R-Derivation).}
\end{aligned}
$$

Weil $\widetilde{D}$ und D beides R-Derivationen sind,folgt

$$\widetilde{D}f = Df \text{ für jedes } f \in A.$$

QED.

4.1.2 Tangentialräume, eine heuristische Einführung

4.1.2 A Tangenten und Tangentialvektoren

Wir verwenden die Bezeichnungen des ersten Kapitels. Sei

$$X \subseteq \mathbb{A}^n$$

eine abgeschlossene Teilvarietät des $\mathbb{A}^n$. Wir identifizieren die k-Algebra der regulären Funktionen auf X mit

$$k[X] = k[T]/I = k[T_1,..., T_n]/I,$$

wobei I das Ideal der polynomialen Funktionen auf $\mathbb{A}^n$ bezeichne, die auf X identisch Null sind. Wir wählen ein Erzeugendensystem des Ideals I, sagen wir

$$I = (f_1,...,f_s).$$

Seien $x \in X$ ein Punkt und

$$L \subseteq \mathbb{A}^n$$

eine Gerade durch x. Die Punkte der Geraden L haben die Gestalt

$$x + t\bullet v$$

mit $t \in k$, wobei

$$v = (v_1,...,v_n) \in \mathbb{A}^n - \{0\}$$

ein von Null verschiedener Richtungsvektor der Geraden sei. Die Werte von t, für welche x im Durchschnitt

$$X \cap L$$

liegt, findet man durch Lösung des Gleichungssystems

$$f_i(x + t\bullet v) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots , s. \qquad (1)$$

Wegen $x \in X$ ist t = 0 ein Lösung. Bezeichne D_i die partielle Ableitung in k[T] nach T_i. Dann gilt nach der Ketten-Regel

$$f_i(x + t\bullet v) = t\bullet \sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(x+t\bullet v)\bullet v_j + t^2\bullet(\ldots).$$

Damit ist t = 0 genau dann eine "mehrfache Nullstelle" des Gleichungssystems (1), wenn

$$\sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(x+t\bullet v)\bullet v_j = 0 \qquad (2)$$

gilt für i = 1,..., s.

Ist dies der Fall, so sagen wir, L ist eine <u>Tangente</u> und v ist ein <u>Tangentialvektor</u> an X.

4.1.2 B Richtungsableitungen

Bezeichne D_i nach wie vor die partielle Ableitung nach T_i im Polynomring

$$k[T] = k[T_1,..., T_n]$$

und

$$D' := D'_v := \sum_{j=1}^{n} v_j \bullet D_j$$

die Ableitung in Richtung des Vektors $v = (v_1,...,v_n) \in \mathbb{A}^n = k^n$. Als Linear-kombination der k-Derivationen D_j ist D' eine k-Derivation von k[T].

$$D' \in Der_k(k[T]).$$

Bedingung (2) von 4.1.2 B bekommt mit Hilfe von D' die Gestalt

$$(D'f_i)(x) = 0 \text{ für } i = 1,...,s.$$

Bezeichne

$$M_x$$

das maximale Ideal von k[T] der polynomialen Funktionen, die in x gleich Null sind (vgl. 1.3.2 und 1.3.3). Dann bekommt die Forderung, daß v ein Tangentialvektor sein soll, die Gestalt

$$D'(I) \in M_x,$$

denn für $f = \sum_{i=1}^{s} r_i f_i$ mit $r_i \in k[T]$ ist

$$\begin{aligned} D'f(x) &= \sum_{i=1}^{s} r_i(x)D'f_i(x) + \sum_{i=1}^{s} f_i(x)D'\ r_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{s} r_i(x)D'f_i(x) \qquad \text{(wegen } x \in X, \text{ also } f_i(x) = 0) \end{aligned}$$

d.h.

$$D'f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I \Leftrightarrow (D'f)(x) = 0 \text{ für } i = 1,...,s.$$

Die k-lineare Abbildung

$$k[T] \longrightarrow k,\ f \mapsto (D'_v f)(x),$$

faktorisiert sich, falls v ein Tantentialvektor ist, über k[T]/I und induzier so eine k-lineare Abbildung

$$D_v: k[X] \longrightarrow k,\ (f \bmod I) \mapsto (D'f)(x).$$

Wenn wir $k = k_x$ als k[X]-Modul mit der Multiplikation

$$f \cdot c := f(x) \cdot c \text{ für } f \in k[X] \text{ und } c \in k \tag{1}$$

versehen, wird D_v zu einer k-Derivation von k[X] mit Werten in k_x,

$$D_v \in Der_k(k[X], k_x)$$

(weil D' eine k-Derivation ist). Wir haben damit eine Abbildung

$$\{\text{Tangentialsvektoren an X im Punkt } x \in X\} \longrightarrow Der_k(k[X], k_x) \tag{2}$$

$$v = (v_1,...,v_n) \mapsto (f \bmod I \mapsto (D'_v f(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot D_j f_i)(x))$$

konstruiert. Diese Abbildung ist bijektiv. Wir können also den Tangentialraum an die algebraische Varietät X im Punkt $x \in X$ mit dem k-Vektorraum $Der_k(k[X], k_x)$ identifzieren.

Beweis. Injektivität von der Abbildung (2).

Ist $\overline{T}_i \in k[X]$ die Einschränkung von T_i auf X, so gilt wegen $D_j T_i = \delta_{ij}$ für die zu v gehörige Derivation

$$(D'_v \overline{T}_i)(x) = v_i.$$

Für unterschiedliche $v = (v_1,...,v_n)$ müssen die zugehörigen D'_v verschieden sein. Die Abbildung (2) ist injektiv.
Surjektivität der Abbildung (2).
Sei eine Derivation vorgegeben, sagen wir

$$D \in Der_k(k[X], k_x).$$

Wir haben zu zeigen, es gibt einen Tangentialvektor v an X im Punkt x mit

$$D(f) = D'_v f(x) \text{ für jedes } f \in k[X].$$

Sei $\tilde{D}$ die Zusammensetzung

$$\tilde{D}: k[T] \xrightarrow{\sigma} k[X] \xrightarrow{D} k_x$$

von D mit der natürlichen Abbildung σ auf den Faktorring. Dann so ist mit D auch $\tilde{D}$ eine k-Derivation. Auf Grund des Beispiels von 4.1.1 C mit $R = k$, $M = k_x$ und ρ der k-Algebra-Homomorphismus $k[T] \longrightarrow k$, $f \mapsto f(x)$ hat $\tilde{D}$ die Gestalt

$$\tilde{D}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial T_j}(x) \bullet v_j$$

mit

$$v_j = \tilde{D}(T_j) = D(\sigma(T_j)) \in k,$$

d.h. es ist

$$\tilde{D}(f) = \sum_{j=1}^{n} D(\sigma(T_j)) \bullet (D_j f)(x) = (D'_v f)(x)$$

mit $v = (v_1, ... , v_n)$ und

$$D'_v := \sum_{j=1}^{n} v_j \bullet D_j.$$

Als k-Linearkombination der D_i ist D'_v eine k-Derivation

$$D'_v \in Der_k(k[T]).$$

Nach Definition von $\tilde{D}$ liegt $I = Ker(\sigma)$ im Kern von $\tilde{D}$. Insbesondere liegen die Erzeuger $f_1, ... , f_s$ des Ideals I von X in k[T] im Kern, von D'_v

$$0 = \tilde{D}(f_\nu) = (D'_v f_\nu)(x) \text{ für } \nu = 1,...,s.$$

Es folgt $D'_v f_\nu \in M_x$ für jedes ν, also $D'_v(I) \subseteq M_x$, d.h. v ist ein Tangentialvektor an X im Punkt x (vgl. Formel (2) von 4.1.2 A). Wir haben gezeigt, die Abbildung (2) ist surjektiv.

Bemerkung

Die obige Beschreibung der Tangentialvektoren legt die folgende formale Definition der Tangentialräume an eine algebraische Varietät nahe.

4.1.3 Die Tangentialräume einer affinen Varietät 58

Seien X eine affine Varietät und $x \in X$. Der Tangentialraum an X im Punkt x ist definiert als der k-Vektorraum

$$T_x X := Der_k(k[X], k_x).$$

Dabei ist k_x definiert als der k-Vektorraum k mit der durch

$$f\bullet c := f(x)\bullet c \text{ für } f \in k[X] \text{ und } c \in k$$

definierten k[X]-Modul-Struktur (vgl. 4.1.2 B (1)).

Sei

$$\phi: X \longrightarrow Y$$

eine reguläre Abbildung von affinen Varietäten. Der induzierte k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f\circ\phi,$$

definiert nach Bemerkung 4.1.1 A (iii) die k-lineare Abbildung

$$d\phi_x := (\phi^*)_0 : T_x X = \mathrm{Der}_k(k[X], k_{\phi(x)}) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[Y], k_x) = T_{\phi(x)}Y$$

$$D \mapsto D\circ\phi^*.$$

Diese Abbildung heißt Differential von ϕ im Punkt $x \in X$.

Bemerkungen

(i) Die k[X]-Modul-Struktur von k_x mit der Multiplikation

$$k[X] \times k_x \longrightarrow k_x,\ (f, c) \mapsto f(x)\bullet c,$$

wird durch den k-Algebra-Homomorphismus ϕ^* zur k[Y]-Modul-Struktur

$$k[Y] \times k_x \longrightarrow k_x,\ (f, c) \mapsto f(\phi(x))\bullet c,$$

welche mit der Einschränkung der k[Y]-Modul-Struktur von $k_{\phi(x)}$ auf das Bild von ϕ^* übereinstimmt.

(ii) Für je zwei reguläre Abbildungen $X \xrightarrow{\phi} Y$ und $Y \xrightarrow{\psi} Z$ und jeden Punkt $x \in X$ gilt

$$d(\psi\circ\phi)_x = d\psi_{\phi(x)}\circ d\phi_x,$$

denn für $D \in T_x X$, also $d\phi_x(D) \in T_{\phi(x)}Y$ gilt

$$\begin{aligned}(d\phi_x\circ d\psi_{\phi(x)})(D) &= d\phi_x(d\psi_{\phi(x)}(D)) \\ &= d\phi_x(D\circ\psi^*) \\ &= D\circ\psi^*\circ\phi^* \\ &= D\circ(\psi\circ\phi)^* \\ &= d(\psi\circ\phi)_x(D).\end{aligned}$$

(iii) Das Differential der identischen Abbildung id: $X \longrightarrow X$ in $x \in X$ ist die identische Abbildung

$$did_x = id: T_x X \longrightarrow T_x X.$$

(iv) Nachfolgend geben wir zwei alternative Beschreibungen des Tengentialraums einer affinen algebraischen Varietät.

4.1.4 Lemma: Der Raum $T_x X$ als Dual von M_x/M_x^2 **58**

Seien X eine affine algebraische Varietät, $x \in X$ ein Punkt und $D \in T_x X$. Für

$$f, g \in M_x \ (\subseteq k[X])$$

gilt dann

$$D(f\bullet g) = f(x)\bullet Dg + g(x)\bullet Df = 0\bullet Dg + 0\bullet Df = 0,$$

also ist

$$D(M_x^2) = 0,$$

und D induziert eine k-lineare Abbildung

$$\lambda(D): M_x/M_x^2 \longrightarrow k.$$

Die Abbildung

$$\lambda: T_xX = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k),\ D \mapsto (f \bmod M_x^2 \mapsto D(f))$$

ist ein k-linearer Isomorphismus mit der Umkehrung

$$\mu: \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k) \longrightarrow T_xX = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x),\ \ell \mapsto (f \mapsto \ell(f\text{-}f(x) \bmod M_x^2)$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. λ ist k-linear.
Für $D', D'' \in T_xX$ und $f \in M_x$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(D'+D'')(f \bmod M_x^2) &= (D'+D'')(f) \\ &= D'(f) + D''(f) \\ &= \lambda(D')(f \bmod M_x^2) + \lambda(D'')(f \bmod M_x^2), \end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda(D'+D'') = \lambda(D') + \lambda(D'').$$

Für $D \in T_xX$, $c \in k$ und $f \in M_x$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(c\bullet D)(f \bmod M_x^2) &= (c\bullet D)(f) \\ &= c\bullet(D(f)) \\ &= c\bullet\lambda(D)(f \bmod M_x^2), \end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda(c\bullet D) = c\bullet\lambda(D).$$

2. <u>Schritt</u>. Konstruktion der zu λ inversen Abbildung.
Sei $\ell: M_x / M_x^2 \longrightarrow k$ eine k-lineare Abbildung. Für $f \in k[X]$ setzen wir

$$\mu(\ell)f := \ell(f - f(x) \bmod M_x^2).$$

Die Definition ist korrect, weil f - f(x) den Wert 0 hat im Punkt x, d.h. $f- f(x) \in M_x$.
Wir erhalten so eine Abbildung

$$\mu(\ell): k[X] \longrightarrow k_x.$$

<u>Die Abbildung</u> $\mu(\ell)$ <u>ist</u> k-<u>linear</u>. Für $f, f', f'' \in k[X]$ unf $c \in k$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(\ell)(f'+f'') &= \ell((f'+f'') - (f'+f'')(x) \bmod M_x^2) \\ &= \ell((f'-f'(x)) + (f''-f''(x)) \bmod M_x^2) \\ &= \ell(f'-f(x) \bmod M_x^2) + \ell(f''-f''(x) \bmod M_x^2) \quad (\ell \text{ ist linear}) \\ &= \mu(\ell)(f') + \mu(\ell)(f'') \end{aligned}$$

also

$$\mu(\ell)(f'+f'') = \mu(\ell)(f') + \mu(\ell)(f'').$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\mu(\ell)(c\bullet f) &= \ell(c\bullet f - (c\bullet f)(x) \bmod M_x^2)\\ &= c\bullet\ell(f\text{-}f(x) \bmod M_x^2) &&(\ell \text{ ist linear})\\ &= c\bullet\mu(\ell)(f),\end{aligned}$$

<u>Die Abbildung</u> $\mu(\ell)$ <u>ist eine Derivation</u>:

Für f, g $\in$ k[X] und ℓ: $M_x/M_x^2 \longrightarrow k$ linear über k gilt

$$\begin{aligned}(f\text{-}f(x))\bullet(g\text{-}g(x)) &= f\bullet g - f\bullet g(x) - f(x)\bullet g + f(x)\bullet g(x)\\ &= -(f\text{-}f(x))\bullet g(x) - f(x)\bullet(g\text{-}g(x)) + f\bullet g - (f\bullet g)(x).\end{aligned}$$

Weil f - f(x) und g - g(x) in M_x liegen, ist das Produkt dieser beiden Differenzen ein Element von M_x^2. Damit ist

$$f\bullet g - (f\bullet g)(x) \bmod M_x^2 = (f\text{-}f(x))\bullet g(x) + f(x)\bullet(g\text{-}g(x)) \bmod M_x^2 .$$

Wir wenden ℓ an und erhalten

$$\begin{aligned}\mu(\ell)(f\bullet g) &= \ell((f\text{-}f(x))\bullet g(x) + f(x)\bullet(g\text{-}g(x)) \bmod M_x^2)\\ &= g(x)\bullet\ell(f\text{-}f(x) \bmod M_x^2) + f(x)\bullet\ell(g\text{-}g(x) \bmod M_x^2) &&(\ell \text{ ist linear})\\ &= g(x)\bullet\mu(\ell)(f) + f(x)\bullet\mu(\ell)(g) &&(\text{nach Definiton von } \mu(\ell))\\ &= g\bullet\mu(\ell)(f) + f\bullet\mu(\ell)(g) &&(\text{nach Definition der Multiplikation in } k_x).\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß $\mu(\ell)$ eine Derivation ist.

Zusammen ergibt sich, die Abbildung

$$\mu: \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2 , k) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[X], k_x), \ell \mapsto \mu(\ell),$$

ist wohldefiniert.

<u>Die Abbildung</u> μ <u>ist invers zu</u> λ.

Für $\ell \in \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2 , k)$ und $f \in M_x$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda(\mu(\ell))(f \bmod M_x^2) &= \mu(\ell)(f) &&(\text{Definition von } \lambda)\\ &= \ell(f - f(x) \bmod M_x^2)\\ &= \ell(f \bmod M_x^2) &&(\text{wegen } f \in M_x)\end{aligned}$$

Da dies für alle $f \in M_x$ gilt, folgt

$$\lambda(\mu(\ell)) = \ell \text{ für jedes } \ell \in \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2 , k),$$

also

$$\lambda\circ\mu = id.$$

Für $D \in T_xX = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x)$ und $f \in k[X]$ gilt

$$\begin{aligned}\mu(\lambda(D))(f) &= \lambda(D)(f - f(x) \bmod M_x^2) &&(\text{Definiton von } \mu(D))\\ &= D(f\text{-}f(x)) &&(\text{Definiton von } D)\\ &= Df - D(f(x))\\ &= Df &&(D \text{ ist eine k-Derivation})\end{aligned}$$

Da dies für alle $f \in k[X]$ gilt, folgt

$\mu(\lambda(D)) \quad = D,$

also

$$\mu\circ\lambda = \mathrm{id}.$$

QED.

4.1.5 Lemma: Tangentialvektoren als Derivationen des lokalen Rings 59

Seien X eine affine algebraische Varietät, $x \in X$ ein Punkt, $\mathcal{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen auf X und

$$\alpha: k[X] = \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}\ ,\ f \mapsto f_x\ ,$$

der k-Algebra-Homomorphismus, welcher jede auf ganz X reguläre Funktion auf deren Keim im Punkt x abbildet. Dann ist die induzierte k-lineare Abbildung

$$\alpha_0: \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}\ , k_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[X], k_x),\ D \mapsto D\circ\alpha,$$

(vgl. Bemerkung 4.1.1 A (iii)) ein Isomorphismus. Dabei ist die Modul-Struktur von k_x über $\mathcal{O}_{X,x}$ bzw. k[X] gegeben durch

$$f\bullet c = f(x)\bullet c \text{ für } c \in k \text{ und } f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ bzw. } f \in k[X].$$

Beweis. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X im Punk x ist der Quotientenring von k[X] im Primideal M_x ,

$$\mathcal{O}_{X,x} = S^{-1}k[X] \text{ mit } S := k[X] - M_x$$

(vgl. 1.4.4). Damit ist die Behauptung gerade die Aussage von Bemerkung 4.1.1.A (v) im Spezialfall

$$R = k,\ A = k[X],\ S = k[X] - M_x \text{ und } N = k_x.$$

QED.

4.1.6 Lemma: $T_x X$ beim Übergang zu affinen offene Hauptmengen 59

Seien X eine affine Varietät, $x \in X$ und $U \subseteq X$ eine affine offene Teilmenge von X. Dann ist das Differential der natürlichen Einbettung

$$i: U \hookrightarrow X$$

ein k-linearer Isomorphismus

$$di_x: T_x U \xrightarrow{\cong} T_x X.$$

Beweis. Nach Definition des Halms $\mathcal{O}_{X,x}$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von X im Punkt x in Bemerkung 1.4.3 (ii) ändert sich $\mathcal{O}_{X,x}$ nicht, wenn man X durch eine beliebige offene Umgebung von x ersetzt: Insbesondere induziert die natürliche Einbettung i einen Isomorphismus

$$\alpha: \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{U,x}\ .$$

von k-Algebren. Die induzierte Abbildung der Derivationenmoduln

$$\alpha_0: T_x U = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{U,x}\ , k_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}\ , k_x) = T_x X$$

ist deshalb bijektiv.

QED.

Bemerkung

Wir sind nun soweit, den Tangentialraum einer beliebigen algebraischen Varietät zu definieren (siehe die Definition in 1.6.9).

4.1.7 Die Tangentialräume einer algebraischen Varietät 59

Seien X eine algebraische Varietät und $x \in X$ ein Punkt von X. Sind

$$U \subseteq X \text{ und } V \subseteq X$$

affine offene Umgebungen von x mit $V \subseteq U$, so induziert die natürliche Einbettung

$$V \hookrightarrow U$$

nach 4.1.6 einen natürlichen Isomorphismus $T_x V \xrightarrow{\cong} T_x U$. Dies erlaubt es uns, den Tangentialraum $T_x X$ von X im Punkt x als den Tangentialraum $T_x U$ mit U affine offene Umgebung von x in X zu betrachten. Genauer (und formaler): für beliebige affine offene Umgebungen

$$U' \subseteq X, U'' \subseteq X, V \subseteq X$$

von x in X mit

$$V \subseteq U' \text{ und } V \subseteq U''$$

bilden die natürlichen Einbettungen ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] & X \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & U'' \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Die Einschränkungen entlang dieser Einbettungen definieren ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{U',x} \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\ \mathcal{O}_{V,x} & \mathcal{O}_{U'',x} \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

von Isomorphismen von k-Algebren (nach der Definiton des Halms in Bemerkung 1.4.3 (ii)). Wir wenden den Funktor $Der_k(? , k_x)$ an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_x U' \arrow[r, "\cong"] & Der_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) \\ T_x V \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\cong"] & T_x U'' \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Insbesondere bilden die Isomorphismen der Tangentialräume in x ein direktes (und inverses) System. Formal können wir deshalb den Tangentialraum von X im Punkt x definieren als den direkten Limes[1]

$$T_x X := \varinjlim_{U \ni x} T_x U = Der_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x).$$

Dabei ist die Modul-Struktur von $k = k_x$ über $\mathcal{O}_{X,x}$ definiert durch

$$f \bullet c := f(x) \bullet c \text{ für } f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ und } c \in k.$$

---

[1] Im Original wird der inverse Limes verwendet. Da es sich um ein direktes System, das gleichzeitig ein inverses System ist und das aus Isomorphismen besteht, handelt, sind dirketer und inverser Limes kanonisch isomorph.

Sei ϕ: X $\longrightarrow$ Y eine reguläre Abbildung von algebraischen Varietäten und $x \in X$ ein Punkt. Diese reguläre Abbildung induziert einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

und damit eine k-lineare Abbildung

$$d\,\phi_x : T_x X = Der_k(\mathcal{O}_{X,x}, k_x) \longrightarrow Der_k(\mathcal{O}_{Y,f(x)}, k_{f(x)}) = T_{f(x)} Y,$$

das <u>Differential</u> von ϕ im Punkt x.
Ein Punkt x der algebraischen Varietät X heißt <u>nicht-singulär</u> oder auch <u>einfach</u>, wenn

$$\dim_k T_x = \dim_x X$$

gilt. Dabei bezeichne

$$\dim_x X := \max \{\dim Y \mid Y \text{ ist irreduzible Komponente von } X \text{ mit } x \in Y\}$$

die <u>lokale Dimension</u> von X im Punkt x bezeichnet.[2] Wir sagen in diesem Fall auch, X ist <u>glatt</u> im Punkt x. Andernfalls heißt x <u>singulär</u>. Eine algebraische Varietät heißt <u>glatt</u>, wenn sie in jedem ihrer Punkte glatt ist.

Bemerkungen

(i) Wenn wir die Oberfläche einer Kugel oder eines Torus ins Auge fassen, so kann uns das zu der Erwartung führen, daß der Tangentialraum einer algebrraischen Varietät dieselbe Dimensioin haben sollte, wie die Varietät selbst. Aus der Theorie der reellen oder komplexen Mannigfaltigkeiten wissen wir, daß eine Mannigfaltigkeit im jedem ihrer Punkte lokal isomorph ist zum Tangentialraum in diesem Punkt, letzterer also dieselbe Dimension hat wie die Mannigfaltigkeit (in diesem Punkt). Die Beispiele (iii) und (iv) von 4.1.9 Aufgabe 1 zeigen, der von uns eingeführte Tangentialraum einer Varietät X kann eine größere Dimension haben, als die Varietät selbst.

(ii) Dies ist kein Mangel der hier angegebenen Definition des Tangentialraums. Die Beispiele weisen nur darauf hin, daß algebraischen Varietäten (für $k = \mathbb{C}$) im allgemeinen keine Mannigfaltigkeiten sind: sie können singuläre Punkte besitzen. Man kann jedoch zeigen, die meisten Punkte einer algebraischen Varietät X sind nicht-singulär. Genauer, die Menge S der singulären Punkte von X ist eine abgesschlossene Teilmenge von X, von echt kleinerer Dimension

$$\dim S < \dim X.$$

Die Punkte von S sind also ganz besondere Punkte von X. Man nennt sie deshalb “singulär”.

(iii) Allgemein gilt

$$\dim_x X \le \dim T_x X$$

für jede allgebraische Varietät X und jeden Punkt $x \in X$.

(iv) Um das Phänomen besser zu verstehen, ist es sinnvol, den Tangentialkegel

$$C_x(X)$$

einer algebraischen Varietät X im Punkt x einzuführen. Dieser wird definiert als Vereinigung von Geraden durch x, welche aus den Sekanten von X durch x und einem weiteren Punkt $x' \in X$ entstehen, indem man eine Art Grenzübergang

---

[2] Im Original werden nicht-singuläre Punkte definiert als Punkte mit

$$\dim_k T_x = \dim X.$$

Das hängt wohl damit zusammen, daß der Autor vor allem irreduzible Varietäten im Auge hat, bzw. Varietäten, deren irreduzible Komponenten paarweise disjunkt sind und dieselbe Dimension haben. Dies ists für algebraische Gruppen der Fall.

durchführt, bei welchem sich der Punkt x' an den vorgegebenen Punkt x annähert. Von diesem Tangentialkegel kann man zeigen,

$C_x(X)$ ist eine affine algebraische Varietät der Dimension $\dim C_x(X) = \dim_x X$.

Dabei erweist es sich als besser, den Tangentialkegel mit einer Schema-Struktur zu versehen, bei welcher der Koordinatenring nilpotente Elemente haben darf. Das erlaubt nämlich eine geometrische Beschreibung des von uns eingeführten Tangentialraums

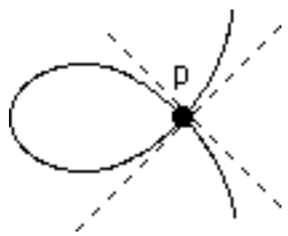
$$T_x X .$$

Dieser ist der kleinste k-Vektorraum, welcher den Tangentialraum

$$C_x(X)$$

als abgeschlossenen Teilschema enthält.

(v) Eine Kurve X, die sich mit sich selbst schneidet,



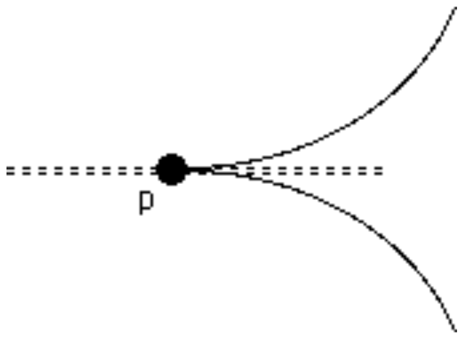
$$X: y^2 = x^2+x^3$$

wobei die beiden Zweige der Kurve im Schnittpunkt p verschiedene Richtungen haben, hat dort als Tangentialkegel die Vereinigung von zwei Geraden durch den Punkt p,

$$C_p(X): y^2 = x^2$$

Der kleinste Vektorraum, der diese beiden Geraden enthält, ist eine Ebene.

(vi) Ein Kurve X mit einer Spitze in einem Punkt p,



$$X: y^2 = x^3$$

hat dort als Tangentialkegel eine doppelt zu zählende Gerade,

$$C_p(X): y^2 = 0$$

mit dem Koordinatenring

$$k[C_p(X)] = k[x,y]/(y^2). \tag{1}$$

Das affine Schema $C_p(X)$ ist kein abgeschlossenes Teilschema eines 1-dimensionalen Vektorraum V, denn dann wäre der Koordinatenring (1) Faktoralgebra des Koordinatenrings

$$k[V] = \text{Polynomring über k in einer Unbestimmten}$$

von V, was er nicht ist, denn jede Faktoralgebra von k[V] ist Koordinatenring eines Schemas einer Dimensioin < dim V (weil V irreduzibel ist).

4.1.8 Die Tangentialräume einer F-Varietät **59**

Seien $F \subseteq k$ ein Teilkörper von k, X eine affine F-Varietät und

$$x \in X(F)$$

ein F-rationaler Punkt (vgl. 1.6.14), d.h. ein F-Algebra-Homomorphismus

$$x: F[X] \longrightarrow F,\ f \mapsto f(x),$$

(vgl. 1.3.7 B). Die Bezeichnungsweise der Abbildungsvorschrift ist dadurch gerechtfertigt, daß wir x mit einem Punkt von X identifizieren können, für welchen die Abbildung x gerade zur Auswertung an der Stelle x wird (vgl. Bemerkung 1.6.7 B (ii))

Durch die Multiplikationsvorschrift

$$f\bullet c := f(x)\bullet c \text{ für } f \in F[X] \text{ und } c \in F$$

wird F zu einem F[X]-Modul, den wir mit

$$F_x$$

bezeichnen wollen. Dann heißt

$$T_x X\,(F) := \mathrm{Der}_F(F[X], F_x)$$

<u>Raum der</u> F-<u>rationalen Punkte</u> von $T_x X$.

Bemerkungen

(i) $T_x X$ (F) ist ein F-Vektorraum mit

$$k\otimes_F T_x X\,(F) \cong \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[X], k\otimes_F F_x) \cong \mathrm{Der}_k(k[X], k_x) = T_x\, X.$$

(ii) Wegen (i) kann man den F-Vektorraum $T_x X$ (F) mit dessen Bild in $T_x X$ identifizieren und so als F-Struktur von $T_x X$ betrachten.

(iii) Ist $\phi: X \longrightarrow Y$ eine über F definiert reguläre Abbildung von affinen F-Varietäten und $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt, so induziert das Differential

$$d\phi_x: T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)}\, Y$$

eine F-lineare -Abbildung

$$d\phi_x(F): T_x X\,(F) \longrightarrow T_{\phi(x)}\, Y\,(F).$$

(iv) Der Begriff des F-rationalen Punkts des Tangentialraums läßt sich analog zum Fall F = k auf den Fall von beliebigen algebraischen Varietäten übertragen.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. <u>Beschreibung linken der Isomorphie</u> (von k-Vektorräumen).

Jede F-Derivation $D: F[X] \longrightarrow F_x$ ist insbesondere F-linear, definiert also eine Abbildung

$$k\times F[X] \longrightarrow k\otimes_F F_x,\ (c, f) \mapsto c\otimes D(f),$$

welche bilinear ist über F, also eine Abbildung

$$1\otimes_F D : k\otimes_F F[X] \longrightarrow k\otimes_F F_x,\ c\otimes f \mapsto c\otimes D(f),$$

induziert, welche k-linear ist. Durch direktes Nachrechnen sieht man, es handelt sich um eine Derivation: für $f,g \in F[X]$ und $c,d \in k$ gilt

$$\begin{aligned}(1\otimes_F D)((c\otimes f)\bullet(d\otimes g)) &= (1\otimes_F D)((cd)\otimes(fg))\\ &= (cd)\otimes D(fg)\end{aligned}$$

$= (cd)\otimes(f(x)\bullet Dg + g(x)\bullet Df)$
$= (c\otimes f)(x)\bullet(d\otimes Dg) + (d\otimes g)(x)\bullet(c\otimes Df)$
$= (c\otimes f)\bullet(1\otimes_F D)(d\otimes g) + (d\otimes g)\bullet(1\otimes_F D)(c\otimes f)$

Wir haben gezeigt, die Abbildung

$$\varphi: k\otimes_F T_x X\,(F) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[X],\, k\otimes_F F_x),\ c\otimes D \mapsto c\bullet(1\otimes_F D),$$

ist wohldefiniert, injektiv und k-linear. Wir haben noch zu zeigen, sie ist auch surjektiv.

Sei $\{\omega_i\}_{i\in I}$ eine F-Vektorraum-Basis von k. Für jedes $\tilde{D} \in \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[X], k\otimes_F F_x)$

und jedes $f\in F[X]$ können wir dann schreiben

$$\tilde{D}(1\otimes f) = \sum_{i\in I} \omega_i\otimes D_i(f)$$

mit eindeutig bestimmten $D_i(f) \in F_x$. Die Abbildungen

$$D_i\colon F[X] \longrightarrow F_x$$

sind F-linear und für $f,g\in F[X]$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(1\otimes fg) &= \tilde{D}((1\otimes f)\bullet(1\otimes g))\\
&= f(x)\bullet \tilde{D}(1\otimes g) + g(x)\bullet \tilde{D}(1\otimes f)\\
&= \sum_{i\in I} \omega_i\otimes f(x)D_i(g) + \sum_{i\in I} \omega_i\otimes g(x)D_i(f)\\
&= \sum_{i\in I} \omega_i\otimes(f(x)D_i(g) + g(x)D_i(f))
\end{aligned}$$

also $D_i(f\bullet g) = f(x)\bullet D_i(g)+ g(x)\bullet D_i(f)$. Wir haben gezeigt $D_i \in T_x X\,(F)$. Nach Konstruktion gilt

$$\varphi\Big(\sum_{i\in I} \omega_i\otimes D_i\Big)(c\otimes f) = \sum_{i\in I} c\bullet\omega_i\otimes D_i(f) = c\bullet\tilde{D}(1\otimes f) = \tilde{D}(c\otimes f),$$

also $\varphi\big(\sum_{i\in I} \omega_i\otimes D_i\big) = \tilde{D}$, d.h. φ ist auch surjektiv.

<u>Die Isomorphie rechts</u> (von k-Vektorräumen)
kommt von k-linearen Isomorphismen

$$\alpha: k\otimes_F F[X] \xrightarrow{\cong} k[X] \text{ und } \beta: k\otimes_F F_x \xrightarrow{\cong} k_x.$$

Es reicht letztere zu beschreiben. Die Abbildung links wird durch die natüriche Einbettung

$$F[X] \hookrightarrow k[X]$$

induziert und ist ein Isomorphismus, weil F[X] eine F-Struktur von k[X] ist.
Die Abbildung links wird durch die Multiplikation in k definiert,

$$\gamma: k\otimes_F F_x \xrightarrow{\cong} k_x,\ c\otimes d \mapsto c\bullet d,$$

und ist trivialerweise ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. Wir haben zu zeigen, die $k\otimes_F F[X]$-Modul-Struktur von $k\otimes F_x$ auf der linken Seite entspricht gerade der $k[X]$-Modul-Struktur von k_x.

Für $a,b \in k$, $c \in F$ und $f \in F[X]$ gilt

$$(c\otimes f)\bullet(a\otimes b) = (c\bullet a)\otimes(f\bullet b) = (c\bullet a)\otimes(f(x)\bullet b)$$

also

$$\begin{aligned}
\gamma((c\otimes f)\bullet(a\otimes b)) &= \gamma((c\bullet a)\otimes(f(x)\bullet b)) && \text{(Definiton von F[X]-Modul-Struktur von } F_x\\
&= c\bullet a\bullet f(x)\bullet b && \text{(Definition von } \gamma)\\
&= c\bullet f(x)\bullet a\bullet b \\
&= c\bullet f(x)\bullet\gamma(a\otimes b) && \text{(Definition von } \gamma)\\
&= (c\bullet f)(x)\bullet\gamma(a\otimes b) \\
&= \alpha(c\otimes f)(x)\bullet\gamma(a\otimes b) \\
&= \alpha(c\otimes f)\bullet\gamma(a\otimes b) && \text{(Definition der k[X]-Modul-Struktur von } k_x)
\end{aligned}$$

Da γ und α additiv sind, folgt

$$\gamma(u\bullet v) = \alpha(u)\bullet\gamma(v) \qquad \text{für } u \in k\otimes_F F[X] \text{ und } v \in k\otimes_F F_x ,$$

d.h. es gilt die Behauptung.

Zu (ii). Es ist nichts zu beweisen.

Zu (iii). Weil $\phi: X \longrightarrow Y$ eine über F definierte reguläre Abbildung von F-Varietäten ist, besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
k[X] & \xleftarrow{\phi^*} & k[Y] \\
\uparrow & & \uparrow \\
F[X] & \xleftarrow{\phi^*|_{F[X]}} & F[Y]
\end{array}$$

Dabei seien die vertikalen Abbildungen die natürlichen Einbettungen und die untere horizontale Abbildung die Einschränkung von ϕ^*. Der untere F-Algebra-Homomorphismus induzierte eine F-lineare Abbildung

$$d\phi_x(F):\mathrm{Der}_F(F[X], F_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_F(F[Y], F_{\phi(x)}),\ D \mapsto D\circ\phi^*|_{F[X]}.$$

Wie im Fall F = k nutzen wir hier die Tatsache, daß die durch ϕ^* auf dem F[X]-Modul F_x definierte F[Y]-Modul-Struktur gerade die F[Y]-Modul-Struktur von $F_{\phi(x)}$ ist.

Für jede lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ von F-Vektorräumen haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
k\otimes_F V & \xrightarrow{k\otimes f} & k\otimes_F W \\
\uparrow & & \uparrow \\
V & \xrightarrow{f} & W
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
1\otimes v & \mapsto & 1\otimes f(v) \\
\uparrow & & \uparrow \\
v & \mapsto & f(v)
\end{array}$$

Speziell für $f = d\phi_x(F)$ hat dieses die folgende Gestalt.

$$\begin{tikzcd} k\otimes_F \mathrm{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[r, "k\otimes d\phi_x(F)"] & k\otimes_F \mathrm{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) & 1\otimes D \arrow[r, mapsto] & 1\otimes(D\circ\phi^*|_{F[X]}) \\ \mathrm{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[u, hook] \arrow[r, "d\phi_x(F)"] & \mathrm{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) \arrow[u, hook] & D \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & D\circ\phi^*|_{F[X]} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Mit Hilfe des linken Isomorphismus von Bemerkung (i) erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[X],k\otimes_F F_x) \arrow[r, "d\phi_x"] & \mathrm{Der}_k(k\otimes_F F[Y],k\otimes_F F_{\phi(x)}) \\ \mathrm{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[u, hook] \arrow[r, "d\phi_x(F)"] & \mathrm{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Und mit Hilfe des rechten Isomorphismus von Bemerkung (ii) das folgende.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_k(k[X],k_x) \arrow[r, "d\phi_x"] & \mathrm{Der}_k(k[Y],k_{\phi(x)}) \\ \mathrm{Der}_F(F[X],F_x) \arrow[u, hook] \arrow[r, "d\phi_x(F)"] & \mathrm{Der}_F(F[Y],F_{\phi(x)}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm können wir aber auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{tikzcd} T_xX \arrow[r, "d\phi_x"] & T_{\phi(x)}Y \\ T_xX(F) \arrow[u, hook] \arrow[r, "d\phi_x(F)"] & T_{\phi(x)}Y(F) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Seine Kommutativität ist gerade die Behauptung von Bemerkung (iii).

<u>Zu (iv)</u>.

1. <u>Schritt</u>. Die Aussage von 4.1.5 läßt sich auf den Fall von F-Strukturen verallgemeinern:

Seien X eine affine F-Varietät, $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt, $\mathcal{O}_X(F)$ die Teilgarbe der F-Strukturen der Garbe $\mathcal{O}_X$ der regulären Funktionen auf X und

$$\alpha_F\colon F[X] = \mathcal{O}_X(F)(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}(F) := F[X]_x\ ,\ f \mapsto f_x\ ,$$

die natürliche Abbildung der F-Algebra F[X] in den Quotientenring im Primideal, welches gerade der Kern der Auswertungsabbildung

$$F[X] \longrightarrow F,\ f \mapsto f(x),$$

ist. Dann ist die induzierte F-lineare Abbildung

$$\alpha_{F0}\colon \mathrm{Der}_F(\mathcal{O}_{X,x}(F)\ ,\ F_x) \longrightarrow \mathrm{Der}_F\,(F[X],\ F_x),\ D \mapsto D\circ\alpha_F,$$

(vgl. Bemerkung 4.1.1 A (iii)) ein Isomorphismus. Dabei ist die Modul-Struktur von F_x über $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ bzw. F[X] gegeben durch

$$f\bullet c = f(x)\bullet c \text{ für } c \in F \text{ und } f \in \mathcal{O}_{X,x}(F) \text{ bzw. } f \in F[X].$$

Nach Definition ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ Quotientenring von F[X] im Primideal

$$M_x \cap F[X],$$

$$\mathcal{O}_{X,x} = S^{-1}F[X] \text{ mit } S := F[X] - M_x$$

Damit ist die Behauptung gerade die Aussage von Bemerkung 4.1.1.A (v) im Spezialfall

$$R = F,\ A = F[X],\ S = F[X] - M_x \text{ und } N = F_x.$$

2. Schritt. Die Aussage von 4.1.6 läßt sich auf den Fall von F-Strukturen verallgemeinern:

Seien X eine affine F-Varietät, $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt und $U \subseteq X$ eine affine F-offene Teilmenge (vgl. 2.3.8) von X. Dann induziert das Differential der natürlichen Einbettung

$$i\colon U \hookrightarrow X$$

einen F-linearen Isomorphismus auf den F-Strukturen der Tangentialräume

$$di_x(F)\colon T_xU(F) \xrightarrow{\cong} T_xX\,(F).$$

Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ ändert sich nicht, wenn man X durch eine beliebige F-offene Umgebung von x ersetzt. Insbesondere induziert die natürliche Einbettung i einen Isomorphismus

$$\alpha_F\colon \mathcal{O}_{X,x}(F) \longrightarrow \mathcal{O}_{U,x}(F)\ .$$

von F-Algebren. Die induzierte Abbildung der Derivationenmoduln

$$\alpha_{F0}\colon T_xU\,(F) = Der_F(\mathcal{O}_{U,x}(F)\ , F_x) \longrightarrow Der_F\,(\mathcal{O}_{X,x}(F)\ , F_x) = T_xX\,(F)$$

ist deshalb bijektiv.

3. Schritt. Seien X eine (nicht notwedig affine) F-Varietät und $x \in X(F)$ ein F-rationaler Punkt von X. Sind

$$U \subseteq X \text{ und } V \subseteq X$$

affine F-offene Umgebungen von x mit $V \subseteq U$, so induziert die natürliche Einbettung

$$V \hookrightarrow U$$

nach dem zweiten Schritt einen natürlichen Isomorphismus $T_xV(F) \xrightarrow{\cong} T_xU(F)$. Dies erlaubt es uns, die F-<u>Struktur des Tangentialraum</u> T_xX <u>von</u> X <u>im Punkt</u> x als den Tangentialraum $T_xU(F)$ mit U affine F-offene Umgebung von x in X zu betrachten.

Genauer (und formaler): für beliebige affine F-offene Umgebungen

$$U' \subseteq X,\ U'' \subseteq X,\ V \subseteq X$$

von x in X mit

$$V \subseteq U' \text{ und } V \subseteq U''$$

bilden die natürlichen Einbettungen ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} U' & \hookrightarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \hookrightarrow & U'' \end{array}$$

Die Einschränkungen entlang dieser Einbettungen definieren ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U',x}(F) & \overset{\cong}{\longleftarrow} & \mathcal{O}_{X,x}(F) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathcal{O}_{V,x}(F) & \overset{\cong}{\longleftarrow} & \mathcal{O}_{U'',x}(F) \end{array}$$

von Isomorphismen von F-Algebren (nach der Definiton des Halms in Bemerkung 1.4.3 (ii)). Wir wenden den Funktor $Der_k(? , k_x)$ an und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_xU'(F) & \overset{\cong}{\longrightarrow} & Der_F(\mathcal{O}_{X,x}(F),F_x) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ T_xV(F) & \overset{\cong}{\longrightarrow} & T_xU''(F) \end{array}$$

Insbesondere bilden diese Isomorphismen der F-Strukturen der Tangentialräume in x ein direktes (und inverses) System. Formal können wir deshalb die F-Struktur des Tangentialraum von X im Punkt x definieren als den direkten Limes[3]

$$T_x X (F) := \varinjlim_{U\ni x} T_xU(F) = Der_F(\mathcal{O}_{X,x}(F) , F_x).$$

Dabei ist die Modul-Struktur von $F = F_x$ über $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ definiert durch

$$f\bullet c := f(x)\bullet c \text{ für } f \in \mathcal{O}_{X,x}(F) \text{ und } c \in F.$$

Man beachte, die Elemente von $\mathcal{O}_{X,x}(F)$ sind lokal in einer F-offenen Umgebung von x von der Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a,b \in F[U]$ und $b\neq 0$ auf U, wobei U eine F-offene Umgebung von x bezeichnet.

QED.

4.1.9 Aufgaben 60

4.1.9 Aufgabe 1: Beispiele für Tangentialräume 60

Beschreiben sie den Tangentialraum mit Hilfe von 4.1.4 in den folgenden Spezielfällen.

(i) X ist ein Punkt.

(ii) $X := \mathbb{A}^n$.

(iii) $X := \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid ab = 0\}$ und $x := (0,0)$.

(iv) $X := \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid a^2 = b^3\}$ und $x := (0,0)$ falls die Charakteristik von k ungleich 2 und ungleich 3 ist.

Beschreibungen. Zu (i). Die einpunktige Varietät.

Für X = {p} gilt

$k[X] = k$

$T_xX = Der_k(k,k) = 0$

Man beachte, für $D \in Der_k(k,k)$ und $c \in k$ gilt $D(c) = c\bullet D(1) = c\bullet 0 = 0$.

[3] Im Original wird der inverse Limes verwendet. Da es sich um ein direktes System, das gleichzeitig ein inverses System ist und das aus Isomorphismen besteht, handelt, sind dirketer und inverser Limes kanonisch isomorph.

Mit Hilfe von 4.1.4 erhält man dasselbe Ergebnis: M_x ist das einzige maximale Ideal von $k[X] = k$, nämlich $M_x = 0$. Es folgt $M_x/M_x^2 = 0$, also

$$T_xX = \mathrm{Hom}_k(M_x/M_x^2, k) = \mathrm{Hom}_k(0, k) = 0.$$

Zu (ii). Der affine RAum.

Für $X = \mathbb{A}^n$ gilt

$$k[X] = k[T_1,...,T_n]$$

und mit $x = (x_1,...,x_n) \in X$ ist

$$M_x = (T_1-x_1,...,T_n-x_n)$$

$$M_x/M_x^2 = k\bullet (t_1-x_1),..., k\bullet(t_n-x_n) \quad \text{mit } t_i := T_i \bmod M_x^2.$$

Die t_i-x_i bilden eine Basis von des k-Vektorraums M_x/M_x^2. Das Bild des i-ten Elements $(t_i\text{-}x_i)^\vee$ der dualen Basis in

$$T_xX = \mathrm{Der}_k(k[X], k_x)$$

beim Isomorphismus von 4.1.4 ist die k-Derivation D_i

$$k[X] \longrightarrow k_x$$

mit

$$D_i(T_j) = D_i(T_j - x_j) = \delta_{ij},$$

d.h. D_i ist die partielle Ableitung von T_i an der Stelle x,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}\Big|_x$$

und T_xX ist der k-Vektorraum mit der Basis $D_1,...,D_n$,

$$T_xX = k\bullet \frac{\partial}{\partial T_1}\Big|_x + ... + k\bullet \frac{\partial}{\partial T_n}\Big|_x$$

Zu (iii). Zwei sich schneidende Geraden.

Für $X = V(T_1T_2)$ und $x = (0,0)$ gilt

$$k[X] = k[T_1,T_2]//(T_1T_2)$$

$$M_x = (T_1,T_2)\bullet k[X]$$

$$M_x/M_x^2 = (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2+(T_1T_2)$$

$$= (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2$$

Das Dual von T_xX ist dasselbe wie das des $\mathbb{A}^2$ (vgl. (ii) mit n = 2). Also ist

$$T_xX = T_x\mathbb{A}^2$$

Zu (iv). Die semikubische Parabel (ordinary cusp).

Für $X = V(T_1^2-T_2^3)$ und $x = (0,0)$ gilt

$$k[X] = k[T_1,T_2]//(T_1^2-T_2^3)$$

$$M_x = (T_1,T_2)\bullet k[X]$$

$$M_x/M_x^2 = (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2+(T_1^2-T_2^3)$$
$$= (T_1,T_2)/(T_1,T_2)^2$$

Das Dual von $T_x X$ ist dasselbe wie das des $\mathbb{A}^2$ (vgl. (ii) mit n = 2). Also ist

$$T_x X = T_x \mathbb{A}^2$$

QED.

4.1.9 Aufgabe 2: Tangentialraum einer Produktvarietät *60*

Seien X und Y algebraische Varietäten und $x \in X$, $y \in Y$ zwei Punkte. Dann gilt

$$T_{(x,y)} X\times Y \cong T_x X \oplus T_y Y$$

Wir geben zwei Beweise an. Der erste verwendet wie in Aufgabe 1 die Beschreibung des Tangentialraum in 4.1.4. Der elegantere zweite Beweis benutzt die funktielle Abhängigkeit des Tangentialraum $T_x X$ vom Paar (x, X).

1.Beweis. Es gilt

$$k[X\times Y] = k[X]\otimes_k k[Y]$$

Die (surjektiven) natürlichen Projektionen auf die beiden Faktoren

$$p_1: X\times Y \longrightarrow X \text{ und } p_2: X\times Y \longrightarrow Y$$

induzieren injektive k-Algebra-Homomorphismen

$$p_1^*: k[X] \hookrightarrow k[X\times Y], f \mapsto f\otimes 1, \text{ und } p_2^*: k[Y] \hookrightarrow k[X\times Y], f \mapsto 1\otimes f.$$

Wir betrachten k[X] und k[Y] als Teilringe von k[X×Y] bezüglich dieser Einbettungen. Es gilt

$$p_1^*(M_x) \subseteq M_{(x,y)} \text{ und } p_2^*(M_y) \subseteq M_{(x,y)}, \qquad (1)$$

denn für jede reguläre Funktion f auf X, mit der Nullstelle x, ist $f\circ p_1$ eine reguläre Funktion auf X×Y mit der Nullstelle (x,y) und analog ist für jede reguläre Funktion g auf Y mit der Nullstelle y die Verpflanzung $g\circ p_2$ eine reguläre Funktion auf X×Y mit der Nullstelle (x,y). Weil $M_{(x,y)}$ ein Ideal von k[X×Y] ist, erhalten wir

$$(M_x\otimes 1)\bullet k[X\times Y] + (1\otimes M_y)\bullet k[X\times Y] \subseteq M_{(x,y)},$$

also

$$M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y \subseteq M_{(x,y)}, \qquad (2)$$

Nun ist aber das Ideal links ein maximales Ideal von k[X×Y], denn

$$\begin{aligned} k[X\times Y]/(M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y) &\overset{4}{=} (k[X]/M_x)\otimes(k[Y]/M_y) \\ &= k\otimes_k k \\ &\cong k \end{aligned}$$

ist ein Körper. Deshalb gilt in (2) das Gleichheitszeichen.

Wir erhalten

---

4 Das Tensorprodukt ist rechtsexakt.

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} = M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y\ /(M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y)^2$$

$$= M_x\otimes k[Y] + k[X]\otimes M_y\ /(M_x^2\otimes k[Y] + M_x\otimes M_y + k[X]\otimes M_y^2)$$

$$\subseteq k[X]\otimes k[Y]/(M_x^2\otimes k[Y] + M_x\otimes M_y + k[X]\otimes M_y^2)$$

$$\cong (k[X]\otimes k[Y]\ /\ M_x^2\otimes k[Y])\ /\ (M_x^2\otimes k[Y] + M_x\otimes M_y + k[X]\otimes M_y^2)\ /\ M_x^2\otimes k[Y])$$

$\cong$[5] $(k[X]/M_x^2)\otimes k[Y])/((M_x/M_x^2)\otimes M_y + (k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2)$

$$\cong (k[X]/M_x^2)\otimes k[Y]\ /\ (k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2)\ /\ ((M_x/M_x^2)\otimes M_y + (k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2)/(k[X]/M_x^2)\otimes M_y^2$$

$\cong$[6] $(k[X]/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2)/((M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$

Es folgt

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong (M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) + (k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) \qquad (3)$$

$$\subseteq (k[X]/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2)/((M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) \qquad (4)$$

Dabei ist die Summe auf der rechten Seite von (3) direkt, denn der Durchschnitt der beilden Sumanden ist (nach A.1.16)

$$(M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) \cap (k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) = (M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

Nach (3) ist dieser Vektorraum gleich 0. Damit gilt

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong (M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) \oplus (k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

Dabei sind die beiden Tensorprodukte rechts als Teilmoduln von (4) anzusehen. Weil in (4) das Tensorprodukt

$$(M_x/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2)$$

gleich 0 gilt, können wir danach faktorisieren, ohne die Moduln zu verändern. Es gilt

$$(M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y^2) = (M_x/M_x^2)\otimes(k[Y]/M_y) = (M_x/M_x^2)\otimes_k k$$

und

$$(k[X]/M_x^2)\otimes(M_y/M_y^2) = (k[X]/M_x)\otimes(M_y/M_y^2) = k\otimes_k (M_y/M_y^2)$$

also

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong (M_x/M_x^2)\otimes_k k \oplus k\otimes_k (M_y/M_y^2), \qquad (5)$$

wobei die beiden Tensorprodukte nach wie vor wie Teilmoduln von (4) zu behandeln sind. Aus den natürlichen Einbettungen

$$k \hookrightarrow k[X]/M_x^2 \text{ und } k \hookrightarrow k[Y]/M_y^2$$

erhalten wir durch Anwenden der Funktoren $(M_x/M_x^2)\otimes_k$ bzw. $\otimes_k (M_y/M_y^2)$ injektive Abbildungen, welche die k-Vektorräume M_x/M_x^2 und M_y/M_y^2 mit den Teilmoduln von (4) auf der rechten Seite von (5) identifizieren. Damit bekommt die Isomorphie (5) die Gestalt

$$M_{(x,y)}/M^2_{(x,y)} \cong M_x/M_x^2 \oplus M_y/M_y^2.$$

---

[5] $\otimes$ ist rechtsexakt.

[6] $\otimes$ ist rechtsexakt.

Wir gehen zu den dualen Vektorräumen über und erhalten die Behauptung.
QED.
2.Beweis. Die Zusammensetzungen

$$X \xrightarrow{q_1} X\times Y \xrightarrow{p_1} X$$

$$x' \mapsto (x',y),\ (x', y') \mapsto x',$$

und

$$Y \xrightarrow{q_2} X\times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

$$y' \mapsto (x,y'),\ (x', y') \mapsto y',$$

sind identische Abbildungen. Dasselbe gilt also auch für deren Differentiale, d.h. es gilt

$$(dp_i)_{(x,y)}\circ(dq_i)_x = 1 \text{ für } i = 1,2.$$

Wir erhalten kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_xX & \xrightarrow{dq_1} & T_{(x,y)}X\times Y \\ & 1\searrow & \downarrow(dp_1)_{(x,y)} \\ & & T_xX \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} T_yY & \xrightarrow{dq_2} & T_{(x,y)}X\times Y \\ & 1\searrow & \downarrow(dp_2)_{(x,y)} \\ & & T_yY \end{array} \qquad (1)$$

Weiter sind die beiden folgenden Abbilddungen konstant.

$$X \xrightarrow{q_1} X\times Y \xrightarrow{p_2} y$$

$$x' \mapsto (x',y),\ (x', y') \mapsto y',$$

und

$$Y \xrightarrow{q_2} X\times Y \xrightarrow{p_1} X$$

$$y' \mapsto (x,y'),\ (x', y') \mapsto x',$$

Die erste faktorisiert sich über $\{y\} \subseteq Y$, die zweite über $\{x\} \subseteq X$. Die Differentiale faktorisieren sich deshalb über den Tangentialraum der einpunktigen Varietät, d.h. über den trivialen Vektorraum, d.h. es gilt

$$(dp_{2-i})_{(x,y)}\circ(dq_i)_x = 0 \text{ für } i = 1,2.$$

Die Diagramme (1) bleiben deshalb kommutativ, wenn wir die Werte von $(dq_i)_x$ um Elemente aus dem Bild von $(dq_{2-i})_x$ abändern. Das bedeutet, die folgenden Diagramme sind kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} T_xX\oplus T_yY & \xrightarrow{q} & T_{(x,y)}X\times Y \\ & \pi_1\searrow & \downarrow(dp_1)_{(x,y)} \\ & & T_xX \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} T_xX\oplus T_yY & \xrightarrow{q} & T_{(x,y)}X\times Y \\ & \pi_2\searrow & \downarrow(dp_2)_{(x,y)} \\ & & T_yY \end{array} \qquad (2)$$

Dabei sei q die Abbildung

$$q\colon T_xX \oplus T_yY \longrightarrow T_{(x,y)}X\times Y,\ (v, w) \mapsto (dq_1)_x(v) + (dq_2)_y(v),$$

und π_i sei die Projektion auf den i-ten direkten Summanden. Sei r die Abbildung

$$r\colon T_{(x,y)}X\times Y \longrightarrow T_xX \oplus T_yY,\ w \mapsto ((dp_1)_{(x,y)}(w), (dp_2)_{(x,y)}(w)).$$

Auf Grund der Kommutativität der beiden Diagramme (2) gilt dann

$$\pi_i\circ r\circ q = (dp_i)_{(x,y)}\circ q = \pi_i \text{ für } i = 1,2.$$

Also ist

$$r\circ q = 1: T_xX \oplus T_yY \xrightarrow{q} T_{(x,y)}X\times Y \xrightarrow{r} T_xX \oplus T_yY$$

die identische Abbildung. Insbesonder gilt:

q ist injektiv und r ist surjektiv.

Es reicht zu zeigen, r ist injektiv. Sei

$$D \in \mathrm{Ker}(r).$$

Dann liegt D im Kern der beiden Koordinantenfunktionen von r, d.h. die Zusammensetzung von $D: k[X]\otimes k[Y] \longrightarrow k_{(x,y)}$ mit den beiden natürlichen Abbildungen

$$k[X] \longrightarrow k[X]\otimes k[Y],\ f \mapsto f\otimes 1, \text{ und } k[Y] \longrightarrow k[X]\otimes k[Y],\ g \mapsto 1\otimes g,$$

ist Null, d.h.

$$D(f\otimes 1) = 0 \text{ und } D(1\otimes g) = 0 \text{ für } f\in k[X] \text{ und } g\in k[Y].$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned} D(f\otimes g) &= D((f\otimes 1)\bullet(1\otimes g)) \\ &= f(x)D(1\otimes g) + g(x)\bullet D(f\otimes 1) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $f \in k[X]$ und $g \in k[Y]$. Weil D eine k-lineare Abbildung ist, ist damit

$$D = 0 \text{ auf } k[X]\otimes k[Y].$$

Wir haben gezeigt, r ist auch injektiv, also ein Isomorphismus.
QED.

4.1.9 Aufgabe 3: Tangentialvektoren und Dualzahlen *60*

Seien X eine affine algebraische Varietät, $x \in X$ ein Punkt und

$$k[\tau] = k[T]/(T^2)$$

die k-Algebra der Dualzahlen (τ bezeichne die Restklasse von T). Zeigen Sie, es gibt einen k-linearen Isomorphismus

$$T_x \longrightarrow \{ \phi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}} (k[X], k[\tau]) \mid \phi(f) - f(x) \in k\bullet\tau \text{ für } f\in k[X] \}$$

Die Elemente der Menge rechts heißen <u>k[τ]-wertige Punkte</u> von X über dem Punkt x.
Beweis. Wir verwenden für die Menge auf der rechten Seite die Bezeichnung

$$\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß mit je zwei Elementen aus dieser Menge auch deren Summe in dieser Menge liegt und mit jedem Element auch dessen k-Vielfache. Mit anderne Worten,

$$\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau]) \text{ ist k-linearer Unterraum von } \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$$

Für jeden k-Algebra-Homomorphismus aus dieser Menge, sagen wir

$$\phi: k[X] \longrightarrow k[\tau] = k + k\bullet\tau,$$

sei $D_\phi f$ das eindeutig bestimmte Element aus k mit

$$\phi(f) = f(x) + D_\phi f\bullet\tau.$$

Weil ϕ als k-Algebra-Homomorphismus linear ist, ist auf diese Weise eine k-lineare Abbildung

$$D_\phi: k[X] \longrightarrow k$$

definiert. Weilter gilt für $f, g \in k[X]$

$$\begin{aligned}\phi(f\bullet g) &= \phi(f)\bullet\phi(g)\\ &= (f(x)+ D_\phi(f)\bullet\tau)\bullet(g(x)+D_\phi(g)\bullet\tau) && \text{(Definition von } D_\phi)\\ &= f(x)\bullet g(x) + (f(x)\bullet D_\phi(g)+g(x)\bullet D_\phi(f))\bullet\tau) && \text{(wegen } \tau^2 = 0)\end{aligned}$$

also - weil 1 und τ linear unabhängig über k sind -

$$D_\phi(f\bullet g) = f(x)\bullet D_\phi(g)+g(x)\bullet D_\phi(f).$$

Wir haben gezeigt, D_ϕ ist eine k-Derivation mit Werten in k_x, d.h. die Abbildung

$$\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau]) \longrightarrow T_xX,\ \phi \mapsto D_\phi, \tag{1}$$

ist wohldefiniert. Direkt an der Definition von D_ϕ liest man ab, daß die Abbildung k-linear ist. Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß sie bijektiv ist. Zeigen wir, es gibt eine Umkehrabbildung. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$T_xX \longrightarrow \mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau]),\ v \mapsto (f \mapsto f(x)+v(f)\bullet\tau). \tag{2}$$

<u>Die Abbildung</u> (2) <u>ist wohldefiniert</u>.

Wir haben zu zeigen, für jeden Tangentialvektor v: $k[X] \longrightarrow k_x$ liegt die Abbildung

$$\alpha_v{:}k[X] \longrightarrow k[\tau]),\ f \mapsto f \mapsto f(x)+v(f)\bullet\tau,$$

in $\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$. Für f, g $\in$ k[X] gilt

$$\begin{aligned}\alpha_v(f\bullet g) &= f(x)\bullet g(x) + v(f\bullet g)\bullet\tau && \text{(Definition von } \alpha_v)\\ &= f(x)\bullet g(x) + f(x)\bullet v(g)\bullet\tau + g(x)\bullet v(f)\bullet\tau && \text{(v ist eine Derivation mit Wertn in } k_x)\\ &= (f(x)+v(x)\bullet\tau)\bullet(g(x)+v(x)\bullet\tau) && \text{(wegen } \tau^2 = 0)\\ &= \alpha_v(f)\bullet\ \alpha_v(f)\end{aligned}$$

Damit ist α_v ein Ring-Homomorphismus. Außerdem ist für f,g $\in$ k[X] und c$\in$k:

$$\begin{aligned}\alpha_v(f+c\bullet g) &= f(x)+c\bullet g(x) + v(f+c\bullet g)\bullet\tau && \text{(Definition von } \alpha_v)\\ &= f(x) + c\bullet g(x) + v(f)\bullet\tau + c\bullet v(g)\bullet\tau && \text{(v ist k-linear)}\\ &= (f(x)+v(f)\bullet\tau) + c\bullet(g(x) + v(g)\bullet\tau)\\ &= \alpha_v(f) + c\bullet\ \alpha_v(g).\end{aligned}$$

Damit ist α_v ein k-linearer Ring-Homomorphismus, also ein Homomorphismus von k-Algebren. Nach Definition gilt für jedes f $\in$ k[X]

$$\alpha_v(f) - f(x) = v(f)\bullet\tau \in k\bullet\tau,$$

d.h. α_v liegt in $\mathrm{DHom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k[\tau])$.

<u>Die Abbildung</u> (2) <u>ist invers zu</u> (1).

Für jeden Tangentialvektor v: $k[X] \longrightarrow k_x$ und jedes f $\in$ k[X] gilt

$$\begin{aligned}D_{\alpha_v}(f)\bullet\tau &= \alpha_v(f) - f(x) && \text{(Definition von } D_\phi)\\ &= (f(x) + v(f)\bullet\tau) - f(x) && \text{(Definiton von } \alpha_v)\\ &= v(f)\bullet\tau.\end{aligned}$$

also $D_{\alpha_v}(f) = v(f)$. Weil dies für jedes f gilt, folgt

$$D_{\alpha_v} = v \text{ für jedes } v \in T_x X \tag{3}$$

Weiter gilt für jedes $\phi \in DHom_{k\text{-}Alg}(k[X], k[\tau])$ und jedes $f \in k[X]$

$$\begin{aligned} \alpha_{D_\phi}(f) &= f(x) + D_\phi(f)\bullet\tau && \text{(Definition von } \alpha_v) \\ &= f(x) + (\phi(f) - f(x)) && \text{(Definition von } D_\phi) \\ &= \phi(f). \end{aligned}$$

Weil dies für jedes $f \in k[X]$ gilt, folgt

$$\alpha_{D_\phi} = \phi \text{ für jedes } \phi \in DHom_{k\text{-}Alg}(k[X], k[\tau]). \tag{4}$$

Zusammen bedeuten (3) und (4), daß die Abibldungen (1) und (2) zueinander invers sind. Insbesondere ist (2) ein k-linearer Isomorphismus.
QED.

4.1.9 Aufgabe 4 — *60*

Seien Y eine algebraische Varietät, $X \subseteq Y$ ein abgeschlossene Teilvarietät und

$$\phi: X \hookrightarrow Y$$

die natürliche Einbettung. Dann ist

$$d\phi_x: T_x X \longrightarrow T_{\phi(x)} Y$$

injektiv für jeden Punkt $x \in X$.

Beweis. Die natürliche Einbettung ϕ induziert eine natürliche Surjektion der Koordinatenringe

$$\phi^*: k[Y] \twoheadrightarrow k[X],\ f \mapsto f|_X.$$

Die Verpflanzung entlang ϕ^*,

$$d\phi_x: Der_k(k[X], k_x) \longrightarrow Der_k(k[Y], k_{\phi(x)}),\ D \mapsto D\circ(\phi^*).$$

ist deshalb injektiv, d.h. es gilt die Behauptung.
QED.

4.1.9 Aufgabe 5 — *60*

Geben Sie die in 4.1.8 fehlenden Details an.
Beweis. Diese sind (hoffentlich ausreichend) im Beweis von 4.1.8 angegeben.
QED.

Index

Inhalt